1. Zbadać różniczkowalność funkcji we wskazanych punktach.

(a) $f(x,y) = x^3 + xy$, $(x_0, y_0) = (1, -2)$.

(b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. Napisać równania spłaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji w podanych punktach.

(a) $z = x^2\sqrt{y+1}$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 2)$.

(b) $z = e^{x+2y}$, $(x_0, y_0, z_0) = (2, -1, 1)$.

(c) $z = \frac{\arcsin x}{\arccos y}$, $(x_0, y_0, z_0) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(d) $z = x^y$, $(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 16)$.

3. Wykorzystując różniczkę obliczyć przyblizone wartości podanych wyrażeń. Porównać z kalkulatorem.

(a) $(1.02)^3 \cdot (0.997)^2$.

(b) $\sqrt[3]{(2.93)^2 + (4.05)^3 + (4.99)^3}$.

(c) $2.97 \cdot e^{0.05}$.

(d) $\frac{\cos 0.05}{1.96}$.

4. (a) Wysokość i promień podstawy stożka zmierzono z dokładnością $\pm$ 1 mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można zmierzyć objętość stożka?

(b) Krawędzi prostopadłościanu mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 12$ m. Obliczyć w przybliżeniu jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu jeśli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm.

5. Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji.

(a) $z = f(u,v) = \ln\frac{u}{v+1}$, gdzie $u = x\sin y, v = x\cos y$.

(b) $z = f(u,v,w) = \arcsin \frac{u}{v+w}$, gdzie $u = e^{\frac{x}{y}}$,$v = x^2 + y^2$,$w = 2xy$.

6. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe we wskazanych punktach i kierunkach.

(a) $f(x,y) = 2|x| + |y|$, $(x_0, y_0) = (0,0)$, $\vec{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (1,0)$, $\vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

(c) $f(x,y,z) = x^2 + yz$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1,0,1)$, $\vec{v} = (\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13})$.

7. Napisać wzór Taylora z drugą resztą dla podanych funkcji w otoczeniu wskazanych punktów.

(a) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

(b) $f(x,y) = (x+y)^3$, $(x_0, y_0) = (-1,1)$.

8. Znaleźć extrema lokalne.

(a) $f(x,y) = 3(x-1)^2 + 4(y+2)^2$.

(b) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$.

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(d) $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$.

(e) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 32\ln(xy)$.

(f) $f(x,y,z) = (x+z)y^2(12 - x - y - z)$.